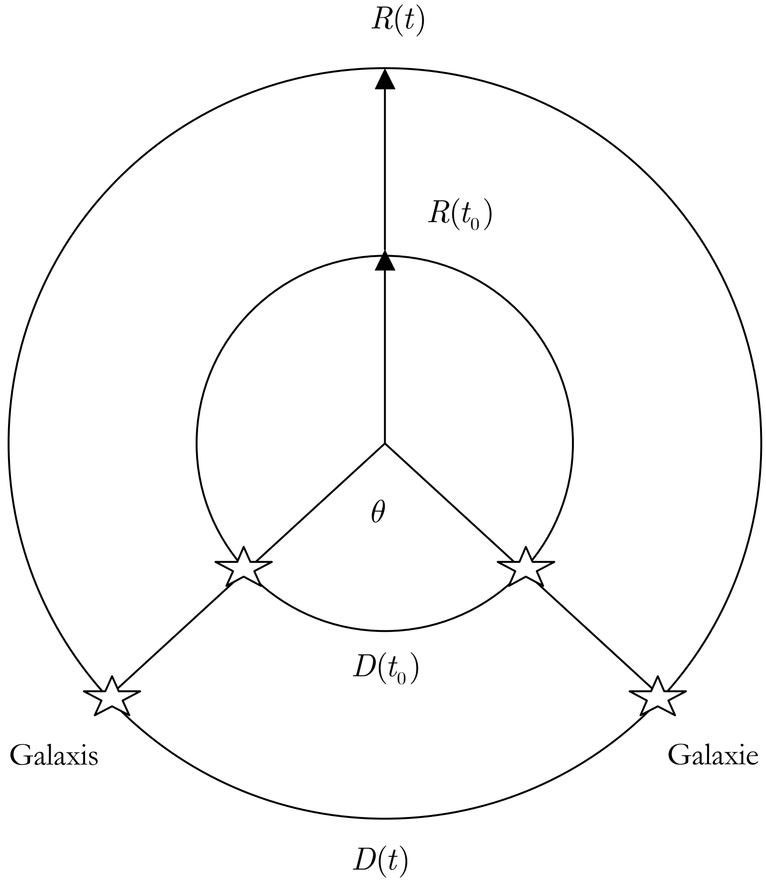
EXPANDIERENDER KOSMOS

Zweidimensionale Kugeloberfläche als Weltmodell

<u>Analogie</u>: Kugelförmiger Luftballon, der aufgeblasen wird (Fließbach, ART, 5. Aufl. 2006, S. 300)



$R(t_0)$	Kugelradius zum Zeitpunkt t_0
$D(t_0)$	Abstand (Großkreisbogen) zweier Galaxien zum Zeitpunkt t_0
$R(t)$	Kugelradius zur Zeit $t > t_0$
$D(t)$	Abstand (Großkreisbogen) zweier Galaxien zur Zeit $t > t_0$
θ	Konstanter Winkel (Großkreis) zwischen zwei Galaxien
Galaxis	Milchstraßensystem
Galaxie	Sternsystem und außergalaktischer Nebel

<u>Analogie</u>: Punkte (Galaxien) auf der Oberfläche des kugelförmigen Luftballons, der aufgeblasen wird, entfernen sich voneinander umso schneller, je weiter sie voneinander entfernt sind.

Hubble-Konstante zum Zeitpunkt t_0:

$$H(t_0) = \frac{\dot{D}(t_0)}{D(t_0)} = \frac{\theta \cdot \dot{R}(t_0)}{\theta \cdot R(t_0)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}$$

Hubble-Konstante zur Zeit $t > t_0$:

$$H(t) = \frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = \frac{\theta \cdot \dot{R}(t)}{\theta \cdot R(t)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

Angenommen die Hubble-Konstante ist unabhängig von der Zeit (beschleunigte Expansion):

$$H(t) = H(t_0) = H \approx 70 \frac{km/s}{Mpc} > 0 \quad \text{mit} \quad Mpc \approx 3{,}26 \cdot 10^6 \, Lj \quad \text{(Lichtjahre)}$$

Fluchtgeschwindigkeit von 70 Kilometern pro Sekunde je Abstand von 3,26 Millionen Lichtjahren.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung für den Kugelradius R bei konstantem H:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \dot{R}(t) = H \cdot R(t)$$

Lösung für den Kugelradius R und die beschleunigte Expansion $\dot{R}$ und $\ddot{R}$:

$$\begin{aligned}
R(t) &= R(t_0) \cdot \exp(H \cdot (t - t_0)) \\
\dot{R}(t) &= H \cdot R(t_0) \cdot \exp(H \cdot (t - t_0)) \qquad \text{für} \quad t \geq t_0 \\
\ddot{R}(t) &= H^2 \cdot R(t_0) \cdot \exp(H \cdot (t - t_0))
\end{aligned}$$

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_c und die Entfernung D_c zu der Galaxis für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum Zeitpunkt t_0:

$$\begin{aligned}
\dot{D}_c(t_0) &= \theta_c(t_0) \cdot \dot{R}(t_0) \stackrel{!}{=} c \\
D_c(t_0) &= \theta_c(t_0) \cdot R(t_0) = \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9 \, Lj
\end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \theta_c(t_0) = \frac{c}{H \cdot R(t_0)} < \pi$$

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_c und die Entfernung D_c zu der Galaxis für $\dot{D} \rightarrow c$ (Lichtgeschwindigkeit) zur Zeit $t > t_0$:

$$\dot{D}_c(t) = \theta_c(t) \cdot \dot{R}(t) \stackrel{!}{=} c$$
$$D_c(t) = \theta_c(t) \cdot R(t) = \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9\, Lj$$

Sichtbarer Welthorizont θ_c zur Zeit $t > t_0$:

$$\theta_c(t) = \frac{c}{\dot{R}(t)} = \frac{c}{H \cdot R(t)} = \theta_c(t_0) \cdot \exp(-H \cdot (t - t_0)) < \theta_c(t_0)$$

Der sichtbare Welthorizont wird mit der Zeit immer kleiner, die Entfernung bleibt konstant.

Abstand D einer Galaxie zur Zeit $t > t_0$, die zum Zeitpunkt t_0 am sichtbaren Welthorizont θ_c in der Entfernung D_c zu der Galaxis liegt:

$$D(t) = \theta_c(t_0) \cdot R(t) = \frac{c}{H} \cdot \exp(H \cdot (t - t_0)) = D_c \cdot \exp(H \cdot (t - t_0)) > D_c$$

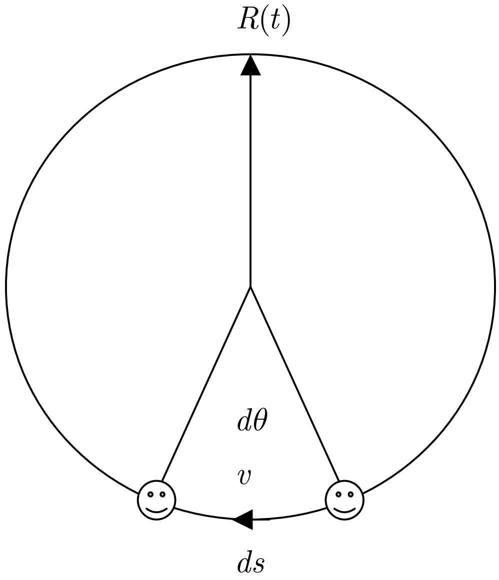
Die Galaxie in der Nähe des sichtbaren Welthorizonts verschwindet im Laufe der Zeit dahinter.

Weltalter T, sichtbarer Welthorizont θ_c und Abstand D zum heutigen Zeitpunkt $t_1 > t_0$:

$$T = t_1 - t_0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{H} \approx 14 \cdot 10^9\, a \quad \text{(Jahre)}$$
$$\theta_c(t_1) = \theta_c(t_0) \cdot \exp(-1) \approx 0{,}368 \cdot \theta_c(t_0)$$
$$D(t_1) = D_c \cdot \exp(1) \approx 2{,}72 \cdot 14 \cdot 10^9\, Lj \approx 38{,}1 \cdot 10^9\, Lj$$

Der sichtbare Welthorizont θ_c beträgt heute nur noch **36,8**% vom sichtbaren Welthorizont zum Zeitpunkt t_0. Der Abstand D der Galaxie beträgt heute das **2,72**-fache von der Entfernung D_c des sichtbaren Welthorizonts. Die Galaxie ist heute nicht mehr sichtbar.

Konstante Bewegung auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche



$R(t)$	Kugelradius zur Zeit $t > t_0$
ds	Wegelement (Großkreisbogen)
$d\theta$	Winkelelement (Großkreis)
v	Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf der Kugeloberfläche

Das Wegelement $ds = v \cdot dt = R(t) \cdot d\theta$ bestimmt die Ableitung und das Integral des Winkels θ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R(t)} \quad \text{und} \quad \int_0^\theta d\theta' = \int_{t_0}^t \frac{v}{R(t')}\, dt'$$

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \frac{v}{R(t_0) \cdot \exp(H \cdot (t' - t_0))}\, dt' = \frac{v}{H \cdot R(t_0)} \cdot (1 - \exp(-H \cdot (t - t_0)))$$

Die konstante Geschwindigkeit $v \leq c$ auf der Kugeloberfläche begrenzt den Winkel $\theta(t)$:

$$\theta(t) \to \frac{v}{H \cdot R(t_0)} \leq \frac{c}{H \cdot R(t_0)} = \theta_c(t_0) < \pi \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

Die konstante Bewegung auf der Kugeloberfläche kehrt nicht mehr zum Ausgangspunkt zurück, aufgrund der beschleunigten Expansion des Kosmos. Gleiches gilt für das Licht, das von Galaxien ausgestrahlt wird und das sich kreisförmig auf der Kugeloberfläche ausbreitet.

<u>Analogie</u>: Ein Plattkäfer bewegt sich auf dem Luftballon, der beschleunigt aufgeblasen wird.

Lichttrajektorie von fernen Galaxien

Die zeitliche Entwicklung des Winkels $\theta_{\text{Licht}}(t)$, der Entfernung $D_{\text{Licht}}(t)$ und der Lichtwegstrecke $s(t)$ von dem Licht, das zum Zeitpunkt t_0 von einer Galaxie ausgestrahlt wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_{\text{Licht}}(t) = \theta_{\text{c}}(t_0)\cdot(1-\exp(-H\cdot(t-t_0)))\\
&D_{\text{Licht}}(t) = \theta_{\text{Licht}}(t)\cdot R(t) = \frac{c}{H}\cdot(\exp(H\cdot(t-t_0))-1)\\
&\dot{D}_{\text{Licht}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta_{\text{Licht}}(t)\cdot R(t)) = c + H\cdot D_{\text{Licht}}(t) = c\cdot\exp(H\cdot(t-t_0))\\
&s(t) = c\cdot(t-t_0)
\end{aligned}\right.\quad \text{für}\quad t > t_0$$

Das Licht entfernt sich mit Überlichtgeschwindigkeit, aufgrund der beschleunigten Expansion.

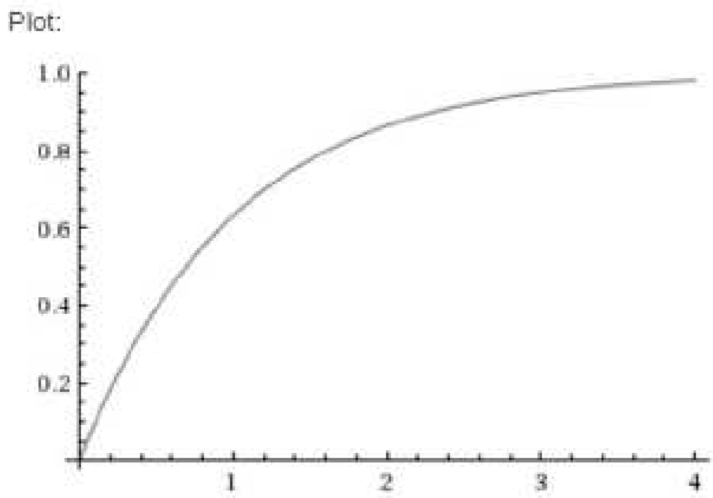


Diagramm mit der Ordinatenachse $\theta_{\text{Licht}}(t)/\theta_{\text{c}}(t_0)$ und der Abszissenachse $H\cdot(t-t_0)$.

Licht von einer Galaxie am sichtbaren Welthorizont zum Zeitpunkt t_0 verharrt am Welthorizont:

$$\theta_{\text{c}}(t_0) - \theta_{\text{Licht}}(t) \equiv \theta_{\text{c}}(t) \quad \text{oder} \quad D(t) - D_{\text{Licht}}(t) \equiv D_{\text{c}} \quad \text{für} \quad t > t_0$$

Die Entfernung $D(t_1) = D_{\text{c}} + D_{\text{Licht}}(t_1) \approx 38{,}1\cdot 10^9\,Lj$ wird auch als Welthorizont bezeichnet.

Licht von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis erreicht uns zum heutigen Zeitpunkt t_1 nach einer Lichtlaufzeit von $T = t_1 - t_0 = 1/H \approx 14\cdot 10^9\,a$:

$$\begin{aligned}
&\theta_{\text{T}} \stackrel{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t_1) = \theta_{\text{c}}(t_0)\cdot(1-\exp(-H\cdot(t_1-t_0))) < \theta_{\text{c}}(t_0) < \pi\\
&\theta_{\text{T}} = \theta_{\text{c}}(t_0)\cdot(1-\exp(-1)) \approx 0{,}632\cdot\theta_{\text{c}}(t_0)
\end{aligned}$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis zur Zeit $t \in (t_0, t_1)$, während ihr Licht (Lichtlaufzeit T) zu uns unterwegs ist:

$$
\begin{aligned}
&D(t) = \theta_{\mathrm{T}} \cdot R(t) = \frac{c}{H} \cdot (\exp(H \cdot (t - t_0)) - 1) + \frac{c}{H} \cdot (1 - \exp(-H \cdot (t_1 - t)))\\
&\dot{D}(t) = \theta_{\mathrm{T}} \cdot \dot{R}(t) = H \cdot D(t)
\end{aligned}
$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis zu den Zeitpunkten t_0 und t_1, wenn ihr Licht (Lichtlaufzeit T) uns erreicht hat:

$$
\begin{aligned}
&D(t_0) = (1 - \exp(-1)) \cdot \frac{c}{H} \approx 0{,}632 \cdot 14 \cdot 10^9\, Lj \approx 8{,}85 \cdot 10^9\, Lj\\
&\dot{D}(t_0) = (1 - \exp(-1)) \cdot c \approx 0{,}632 \cdot c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D(t_1) = (\exp(1) - 1) \cdot \frac{c}{H} \approx 1{,}72 \cdot 14 \cdot 10^9\, Lj \approx 24{,}1 \cdot 10^9\, Lj\\
&\dot{D}(t_1) = (\exp(1) - 1) \cdot c \approx 1{,}72 \cdot c
\end{aligned}
$$

Entfernung D_{Licht} und Lichtwegstrecke s des Lichts von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis zu dem heutigen Zeitpunkt t_1, wenn ihr Licht nach einer Lichtlaufzeit von $T = t_1 - t_0 = 1/H \approx 14 \cdot 10^9\, a$ uns erreicht hat:

$$
\begin{aligned}
&D_{\mathrm{Licht}}(t_1) \equiv D(t_1)\\
&\dot{D}_{\mathrm{Licht}}(t_1) - \dot{D}(t_1) = c + H \cdot D_{\mathrm{Licht}}(t_1) - H \cdot D(t_1) = c\\
&s(t_1) = c \cdot (t_1 - t_0) = \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9\, Lj
\end{aligned}
$$

Das Licht von der Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis erreicht uns heute mit Überlichtgeschwindigkeit nach einer Lichtlaufzeit T von **14** Milliarden Jahren und einer Lichtwegstrecke s von **14** Milliarden Lichtjahren, aufgrund der beschleunigten Expansion des Kosmos. Die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis relativiert die Lichtgeschwindigkeit c des lokal in der Galaxis empfangenen Lichts.

Nach diesem Weltmodell wäre die am weitesten sichtbare Galaxie **8,85** Milliarden Lichtjahre entfernt gewesen, als ihr Licht ausgestrahlt wurde, das uns heute nach einer Lichtlaufzeit T erreicht. Sie wäre heute **24,1** Milliarden Lichtjahre entfernt und würde sich mit Überlichtgeschwindigkeit entfernen. Diese Entfernung wird auch als Welthorizont bezeichnet.

Kosmologische Rotverschiebung

Kosmologische Rotverschiebung z_{kosm} des Lichts von einer Galaxie, das zum Zeitpunkt t_0 ausgestrahlt wurde und zur Zeit $t > t_0$ empfangen wird (Fließbach, ART, 5. Aufl. 2006, S. 302):

$$z_{\mathrm{kosm}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda(t_0)} = \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{\lambda(t_0)} = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t_0)} - 1 = \frac{f(t_0)}{f(t)} - 1 = \frac{R(t)}{R(t_0)} - 1$$

$f(t_0)$ Sendefrequenz des Lichts zum Zeitpunkt t_0
$f(t)$ Empfangsfrequenz des Lichts zur Zeit t
$\Delta\lambda$ Differenz der Wellenlängen des Lichts

Kosmologische Rotverschiebung z_{kosm} des Lichts von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis, das zum Zeitpunkt t_0 ausgestrahlt wurde und uns zum heutigen Zeitpunkt t_1 nach einer Lichtlaufzeit von $T = t_1 - t_0 = 1/H \approx 14 \cdot 10^9 a$ erreicht:

$$z_{\mathrm{kosm}} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} - 1 = \frac{\theta_{\mathrm{T}} \cdot R(t_1)}{\theta_{\mathrm{T}} \cdot R(t_0)} - 1 = \frac{D(t_1) - D(t_0)}{D(t_0)} \equiv \frac{H}{c} \cdot \frac{D(t_1) \cdot D(t_0)}{D(t_0)} = \frac{H}{c} \cdot D(t_1)$$
$$z_{\mathrm{kosm}} = \exp(H \cdot (t_1 - t_0)) - 1 = \exp(1) - 1 \approx 1,72$$

Der heutige Abstand $D(t_1)$ von einer Galaxie kann mittels Helligkeit gemessen werden.

Die Empfangsfrequenz des Lichts ist bei einer Lichtlaufzeit T um das **2,72**-fache kleiner als die Sendefrequenz.

Tatsächlich werden Galaxien mit einer kosmologischen Rotverschiebung von $z_{\mathrm{kosm}} \sim 8,5$ (UDFy-38135539 im September 2010) und $z_{\mathrm{kosm}} \sim 10$ (UDFj-39546284 im Januar 2011) beobachtet!

Lichttrajektorie zum sichtbaren Welthorizont

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_c für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_c(t_2) &= \theta_c(t_2) \cdot \dot{R}(t_2) \overset{!}{=} c \\ D_c(t_2) &= \theta_c(t_2) \cdot R(t_2) = \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9\, Lj \end{aligned}$$

Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt t_1 ausgestrahlt wird und zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ die Galaxie am sichtbaren Welthorizont $\theta_c(t_2)$ in der Entfernung $D_c(t_2)$ erreichen wird:

$$\theta_{\text{Licht}}(t_2) \overset{!}{=} \theta_c(t_2) \quad \text{oder} \quad D_{\text{Licht}}(t_2) \overset{!}{=} D_c(t_2)$$

$$\begin{aligned} &\exp(H \cdot (t_2 - t_1)) - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad H \cdot (t_2 - t_1) = \ln 2 \\ &t_2 - t_1 = \frac{1}{H} \cdot \ln 2 \approx 0{,}693 \cdot 14 \cdot 10^9\, a \approx 9{,}70 \cdot 10^9\, a \\ &s = c \cdot (t_2 - t_1) = \frac{c}{H} \cdot \ln 2 \approx 9{,}70 \cdot 10^9\, Lj \end{aligned}$$

Nach diesem Weltmodell würde das Licht von der Galaxis bereits nach **9,7** Milliarden Jahren die Galaxie am sichtbaren Welthorizont in einer Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren mit Überlichtgeschwindigkeit erreichen. Der sichtbare Welthorizont ist kleiner geworden, aufgrund der beschleunigten Expansion.

Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt t_1 ausgestrahlt wird und zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ den sichtbaren Teilhorizont $k \cdot \theta_c(t_2)$ in der Entfernung $k \cdot D_c(t_2)$ erreichen wird:

$$\exp(H \cdot (t_2 - t_1)) - 1 = k \quad \Rightarrow \quad H \cdot (t_2 - t_1) = \ln(1 + k) \quad \text{für} \quad 0 < k \leq 1$$

Für $k = 0{,}01$ und $\ln 1{,}01 \approx (0{,}01 - 0{,}00005)$ erreicht das Licht von der Galaxis bereits nach **139,3** Millionen Jahren die Entfernung von **140** Millionen Lichtjahren, also nur **0,5**% früher.

Das Weltmodell kann näherungsweise die Aufgabe 4.1 „Zeitdilatation bei Raumfahrt“ (Torsten Fließbach, ART, 5. Auflage 2006, Seite 19 und 345) für große Entfernungen beschreiben. Das mit 1g beschleunigte Raumschiff, das weniger als ein Lichtjahr entfernt einem vorausgesandten Lichtstrahl folgt, würde bereits nach **9,7** Milliarden Jahren den sichtbaren Welthorizont in einer Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren erreichen, aufgrund der beschleunigten Expansion des Kosmos.

Gegenwärtiges Weltmodell

Die zeitliche Entwicklung des Radius (kosmischer Skalenfaktor) $R(t)$ im expandierenden Kosmos wird nach dem Friedmannmodell durch die Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben (Fließbach, ART, 5. Auflage 2006, Seite 323):

$$\frac{dx}{dt} = H \cdot \sqrt{\frac{\Omega_{\mathrm{m}}}{x} + \Omega_{\Lambda} \cdot x^2 + \Omega_{\mathrm{k}}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0 \quad \text{und} \quad t > 0$$

Neben dem Radius $R(t_1)$ und der Hubble-Konstante $H = H(t_1)$ zum heutigen Zeitpunkt $t_1 > 0$ werden die folgenden dimensionslosen Größen des heutigen Kosmos als unabhängig von der Zeit angenommen:

$\Omega_{\mathrm{m}} \approx 0{,}3$ Massendichte
$\Omega_{\Lambda} \approx 0{,}7$ kosmologische Konstante
$\Omega_{\mathrm{k}} \approx 0$ Krümmung (flacher Kosmos)
$\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{\mathrm{k}} = 1$

Lösung der Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen ($\Omega_{\mathrm{k}} = 0$):

$$H \cdot \int_0^t dt' = \int_0^x \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}} + \Omega_{\Lambda} \cdot x'^3}}\, dx'$$

Die elementare Stammfunktion des Integranden nach Bronstein (6. Auflage 1966, Nummer 272):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 + x^3}}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{x^3}{a^3}}$$

Die Areafunktion kann als Logarithmus dargestellt werden:

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{für} \quad x = \sinh y$$

Radius $R(t)$ zur Zeit $t > 0$ in impliziter Darstellung:

$$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\Omega_{\Lambda}} \cdot H \cdot t = \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{\mathrm{m}}} \cdot x^3} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $\dot{R}(t) \to \infty$.

Radius $R(t)$ zur Zeit $t > 0$ in expliziter Darstellung:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \cdot \sinh^2\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H \cdot t\right)} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

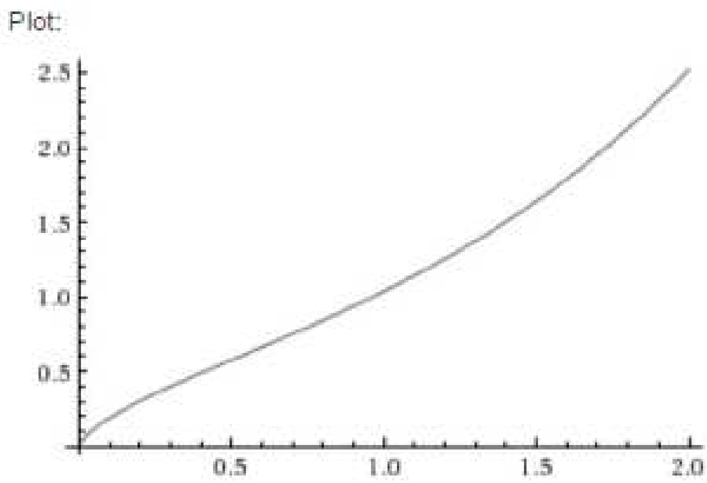


Diagramm mit der Ordinatenachse $R(t)/R(t_1)$ und der Abszissenachse $H \cdot t$.

Für den heutigen Zeitpunkt $t_1 > 0$ mit $x_1 = 1$ kann das Weltalter T bestimmt werden:

$$T = t_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} + \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}\right) \approx 0,964 \cdot \frac{1}{H} \approx 13,5 \cdot 10^9 a$$

Beschleunigung $\ddot{R}$ im expandierenden Kosmos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = H^2 \cdot \left(\Omega_\Lambda \cdot x - \frac{\Omega_m}{2x^2}\right) \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $\ddot{R}(t) \to -\infty$.

Für $x_0 \approx 0,6$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0,527/H \approx 7,37 \cdot 10^9 a$ gilt $\ddot{R}(t_0) = 0$.

Die Expansion des Kosmos wurde zunächst gebremst ($\ddot{R} < 0$) und nach **7,37** Milliarden Jahren wieder beschleunigt ($\ddot{R} > 0$), also vor **6,13** Milliarden Jahren.

Hubble-Konstante $H(t)$ mit dem konstanten Winkel θ zwischen zwei Galaxien zur Zeit $t > 0$:

$$H(t) = \frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = \frac{\theta \cdot \dot{R}(t)}{\theta \cdot R(t)} = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{dt} = H \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{\Omega_{\mathrm{m}}}{x} + \Omega_{\Lambda} \cdot x^2}}{x} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

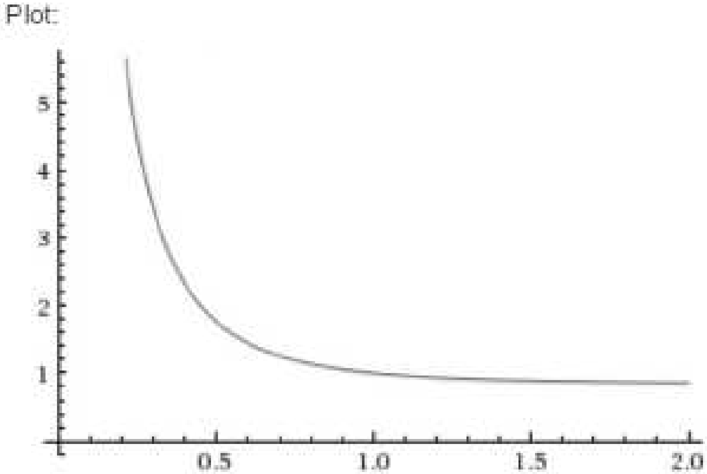


Diagramm mit der Ordinatenachse $H(t)/H$ und der Abszissenachse $R(t)/R(t_1)$.

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $H(t) \to \infty$.

Für $t \to \infty$ nähert sich $H(t)$ dem Grenzwert $\sqrt{\Omega_{\Lambda}} \cdot H \approx 0,837 \cdot H \approx 58,6 \dfrac{km/s}{Mpc}$.

Die Hubble-Konstante wird mit der Zeit immer kleiner. Die Fluchtgeschwindigkeit von Galaxien nähert sich dem Grenzwert von **58,6** Kilometern pro Sekunde je Abstand von **3,26** Millionen Lichtjahren.

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_{c} und die Entfernung D_{c} zu der Galaxis für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum heutigen Zeitpunkt $t_1 > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{\mathrm{c}}(t_1) &= \theta_{\mathrm{c}}(t_1) \cdot \dot{R}(t_1) \stackrel{!}{=} c \\ D_{\mathrm{c}}(t_1) &= \theta_{\mathrm{c}}(t_1) \cdot R(t_1) = \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9 \, Lj \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \theta_{\mathrm{c}}(t_1) = \frac{c}{H \cdot R(t_1)} < \pi$$

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_c und die Entfernung D_c zu der Galaxis für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zur Zeit $t > 0$:

$$\dot{D}_c(t) = \theta_c(t) \cdot \dot{R}(t) \overset{!}{=} c$$
$$D_c(t) = \theta_c(t) \cdot R(t) = \frac{c}{H(t)} = \frac{c \cdot x}{(dx/dt)} = D_c(t_1) \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda \cdot x^2}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

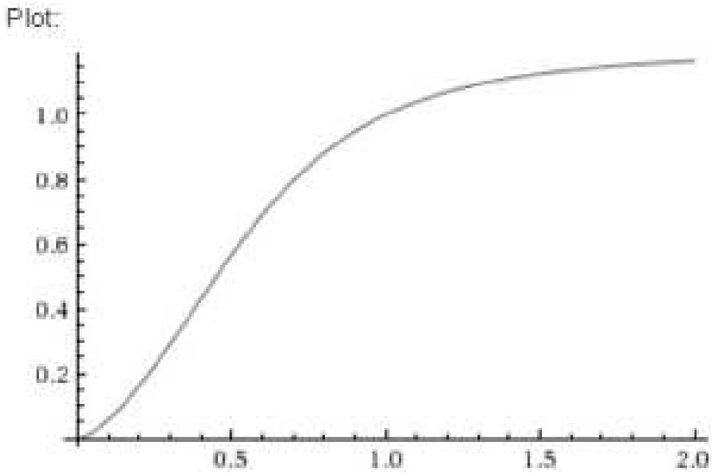


Diagramm mit der Ordinatenachse $D_c(t)/D_c(t_1)$ und der Abszissenachse $R(t)/R(t_1)$.

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $D_c(t) \to 0$.

Für $t \to \infty$ nähert sich $D_c(t)$ dem Grenzwert $\frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \cdot \frac{c}{H} \approx 1{,}195 \cdot 14 \cdot 10^9\,Lj \approx 16{,}7 \cdot 10^9\,Lj$.

Die Entfernung des sichtbaren Welthorizonts zu der Galaxis wird mit der Zeit immer größer, erreicht heute die Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren und nähert sich dem Grenzwert von **16,7** Milliarden Lichtjahren.

Sichtbarer Welthorizont θ_c zur Zeit $t > 0$:

$$\theta_c(t) = \frac{c}{\dot{R}(t)} = \frac{c}{R(t_1) \cdot (dx/dt)} = \theta_c(t_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda \cdot x^2}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

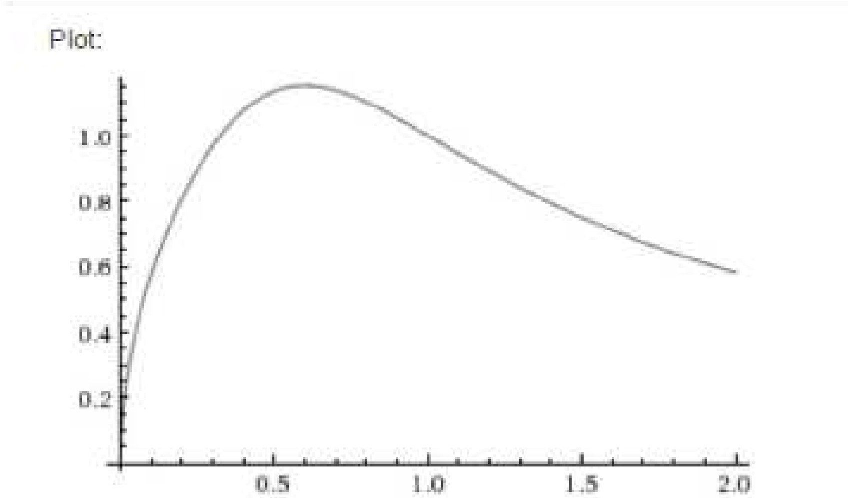


Diagramm mit der Ordinatenachse $\theta_c(t)/\theta_c(t_1)$ und der Abszissenachse $R(t)/R(t_1)$.

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $\theta_c(t) \to 0$.

Für $t \to \infty$ gilt $\theta_c(t) \to 0$.

Für $x_0 \approx 0,324$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0,221/H \approx 3,1 \cdot 10^9 a$ gilt $\theta_c(t_0) = \theta_c(t_1)$:

$$\dot{D}_c(t_0) = \theta_c(t_0) \cdot \dot{R}(t_0) \stackrel{!}{=} c$$
$$D_c(t_0) = \theta_c(t_0) \cdot R(t_0) = \frac{c}{H(t_0)} \approx 0,324 \cdot 14 \cdot 10^9 Lj \approx 4,5 \cdot 10^9 Lj$$

Für $x_0 \approx 0,6$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0,527/H \approx 7,37 \cdot 10^9 a$, beim Übergang von der gebremsten zur beschleunigten Expansion, gilt der maximale sichtbare Welthorizont $\theta_c(t_0) = 1,153 \cdot \theta_c(t_1)$:

$$\dot{D}_c(t_0) = \theta_c(t_0) \cdot \dot{R}(t_0) \stackrel{!}{=} c$$
$$D_c(t_0) = \theta_c(t_0) \cdot R(t_0) = \frac{c}{H(t_0)} \approx 0,692 \cdot 14 \cdot 10^9 Lj \approx 9,7 \cdot 10^9 Lj$$

Der sichtbare Welthorizont stieg zunächst mit der Zeit an, überschritt nach **3,1** Milliarden Jahren den heute sichtbaren Welthorizont, erreichte das Maximum nach **7,37** Milliarden Jahren und unterschreitet ab dem heutigen Zeitpunkt von **13,5** Milliarden Jahren den heute sichtbaren Welthorizont. Die Entfernung nimmt dabei bis zu dem Grenzwert von **16,7** Milliarden Lichtjahren stetig zu.

Abstand D einer Galaxie zur Zeit $t > 0$, die zum heutigen Zeitpunkt $t_1 > 0$ am sichtbaren Welthorizont θ_c in der Entfernung D_c zu der Galaxis liegt:

$$D(t) = \theta_c(t_1) \cdot R(t) = \frac{c}{H} \cdot \frac{R(t)}{R(t_1)} = \frac{c}{H} \cdot x = D_c(t) \cdot \sqrt{\frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda \cdot x^2} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

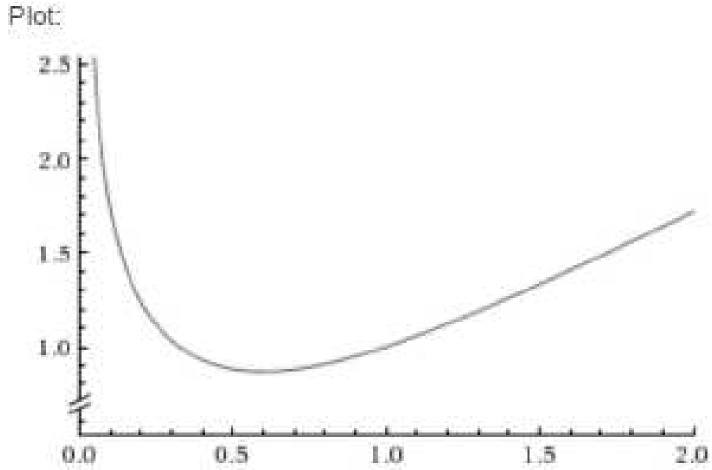


Diagramm mit der Ordinatenachse $D(t)/D_c(t)$ und der Abszissenachse $R(t)/R(t_1)$.

Für $t \to 0$ gilt die Singularität (Urknall Hypothese) $R(t) \to 0$ und $D_c(t) < D(t) \to 0$.

Für $x_0 \approx 0{,}324$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0{,}221/H \approx 3{,}1 \cdot 10^9 a$, dem heute sichtbaren Welthorizont, gilt der Abstand $D(t_0) = D_c(t_0) \approx 4{,}5 \cdot 10^9 Lj$.

Für $x_0 \approx 0{,}6$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0{,}527/H \approx 7{,}37 \cdot 10^9 a$, dem Übergang von der gebremsten zur beschleunigten Expansion, gilt der minimale Abstand $D(t_0) \approx 0{,}867 \cdot D_c(t_0) \approx 8{,}4 \cdot 10^9 Lj$.

Der Abstand der Galaxie, die heute am sichtbaren Welthorizont in der Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren liegt, lag zunächst außerhalb des sichtbaren Welthorizonts, unterschritt nach **3,1** Milliarden Jahren den heute sichtbaren Welthorizont in einer Entfernung von **4,5** Milliarden Lichtjahren, erreichte das Minimum nach **7,37** Milliarden Jahren in einer Entfernung von **8,4** Milliarden Lichtjahren und überschreitet ab dem heutigen Zeitpunkt von **13,5** Milliarden Jahren den heute sichtbaren Welthorizont.

Lichttrajektorie von fernen Galaxien

Die zeitliche Entwicklung des Winkels $\theta_{\text{Licht}}(t)$, der Entfernung $D_{\text{Licht}}(t)$ und der Lichtwegstrecke $s(t)$ von Licht, das zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ von einer Galaxie im expandierenden Kosmos ausgestrahlt wird, wird mit Hilfe der Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben (Fließbach, ART, 5. Auflage 2006, Seite 301 und 327):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{R(t)} \quad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = H \cdot \sqrt{\frac{\Omega_{\text{m}}}{x} + \Omega_\Lambda \cdot x^2} \quad (\Omega_{\text{k}} = 0)$$

$$d\theta = c \cdot \frac{dt}{R(t)} = \frac{c}{R(t_1)} \cdot \frac{dt}{x} = \frac{c}{R(t_1)} \cdot \frac{dx}{x \cdot (dx/dt)} = \frac{c}{H \cdot R(t_1)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}}$$

$$\theta_{\text{Licht}}(t) = \int_0^\theta d\theta' = \theta_{\text{c}}(t_1) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

$$D_{\text{Licht}}(t) = \theta_{\text{Licht}}(t) \cdot R(t) = \frac{c}{H} \cdot x \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \qquad \text{für} \quad t > t_0$$

$$\dot{D}_{\text{Licht}}(t) = \frac{d}{dt}(\theta_{\text{Licht}}(t) \cdot R(t)) = c + H(t) \cdot D_{\text{Licht}}(t)$$

$$s(t) = c \cdot (t - t_0)$$

Es gibt keine elementare Stammfunktion zu dem elliptischen Integral. Das elliptische Integral lässt sich nur numerisch mit festen Integrationsgrenzen lösen (www.wolframalpha.com).

Das Licht entfernt sich mit Überlichtgeschwindigkeit, aufgrund der Expansion des Kosmos.

Maximaler Winkel $\theta_{\text{Licht}}(t \to \infty)$ für $t_0, x_0 \to 0$ und $x \to \infty$:

$$\theta_{\text{Licht}}(t \to \infty) = \theta_{\text{c}}(t_1) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 4{,}44574 \cdot \theta_{\text{c}}(t_1) < \pi$$

Das Licht kehrt nicht mehr zum Ausgangspunkt zurück, aufgrund der beschleunigten Expansion.

Licht von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_∞ zu der Galaxis, das zum Zeitpunkt der Singularität $t_0, x_0 \to 0$ ausgestrahlt wurde, erreicht uns zu keiner Zeit bei einer unendlichen Lichtlaufzeit $t \to \infty$:

$$\theta_\infty \stackrel{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t \to \infty) \approx 4{,}44574 \cdot \theta_{\text{c}}(t_1) < \pi$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ der nicht sichtbaren Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_∞ zu der Galaxis zu dem heutigen Zeitpunkt t_1:

$$D(t_1) = \theta_\infty \cdot R(t_1) \approx 4,44574 \cdot \frac{c}{H} \approx 62,24 \cdot 10^9 \, Lj$$
$$\dot{D}(t_1) = \theta_\infty \cdot \dot{R}(t_1) = H \cdot D(t_1) \approx 4,44574 \cdot c$$

Das Licht von der nicht sichtbaren Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_∞ zu der Galaxis erreicht uns zu keiner Zeit bei einer unendlichen Lichtlaufzeit, aufgrund der beschleunigten Expansion des Kosmos. Nach dem gegenwärtigen Weltmodell wäre die nicht sichtbare Galaxie heute **62,24** Milliarden Lichtjahre entfernt und würde sich mit Überlichtgeschwindigkeit entfernen. Diese Entfernung wird auch als Welthorizont bezeichnet.

Licht von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_T zu der Galaxis, das zum Zeitpunkt der Singularität $t_0, x_0 \to 0$ ausgestrahlt wurde, erreicht uns zum heutigen Zeitpunkt t_1 mit $x_1 = 1$ nach einer Lichtlaufzeit von $T = t_1 - t_0 \approx 0,964/H \approx 13,5 \cdot 10^9 \, a$:

$$\theta_\mathrm{T} \stackrel{!}{=} \theta_\mathrm{Licht}(t_1) = \theta_\mathrm{c}(t_1) \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 3,30508 \cdot \theta_\mathrm{c}(t_1) < \pi$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_T zu der Galaxis zur Zeit $t \in (t_0, t_1)$ mit $x \in (x_0, x_1)$, während ihr Licht (Lichtlaufzeit T) zu uns unterwegs ist:

$$D(t) = \theta_\mathrm{T} \cdot R(t) \approx 3,30508 \cdot \frac{c}{H} \cdot x$$
$$\dot{D}(t) = \theta_\mathrm{T} \cdot \dot{R}(t) = H(t) \cdot D(t) \approx 3,30508 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{\Omega_\mathrm{m}}{x} + \Omega_\Lambda \cdot x^2} > c \qquad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)} > 0$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_T zu der Galaxis zu dem heutigen Zeitpunkt t_1 mit $x_1 = 1$, wenn ihr Licht (Lichtlaufzeit T) uns erreicht hat:

$$D(t_1) = \theta_\mathrm{T} \cdot R(t_1) \approx 3,30508 \cdot \frac{c}{H} \approx 46,2 \cdot 10^9 \, Lj$$
$$\dot{D}(t_1) = \theta_\mathrm{T} \cdot \dot{R}(t_1) \approx 3,30508 \cdot c$$

Entfernung D_{Licht} und Lichtwegstrecke s des Lichts von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis zu dem heutigen Zeitpunkt t_1, wenn ihr Licht nach einer Lichtlaufzeit von $T = t_1 - t_0 \approx 0{,}964/H \approx 13{,}5 \cdot 10^9 a$ uns erreicht hat:

$$\begin{aligned}
&D_{\text{Licht}}(t_1) = D(t_1) \\
&\dot{D}_{\text{Licht}}(t_1) - \dot{D}(t_1) = c + H \cdot D_{\text{Licht}}(t_1) - H \cdot D(t_1) = c \\
&s(t_1) \approx 0{,}964 \cdot \frac{c}{H} \approx 13{,}5 \cdot 10^9 Lj
\end{aligned}$$

Das Licht von der Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis erreicht uns heute mit Überlichtgeschwindigkeit nach einer Lichtlaufzeit T von **13,5** Milliarden Jahren und einer Lichtwegstrecke s von **13,5** Milliarden Lichtjahren, aufgrund der zunächst gebremsten und dann verzögert beschleunigten Expansion des Kosmos. Die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis relativiert die Lichtgeschwindigkeit c des lokal in der Galaxis empfangenen Lichts.

Nach dem gegenwärtigen Weltmodell wäre die am weitesten sichtbare Galaxie heute **46,2** Milliarden Lichtjahre entfernt und würde sich mit Überlichtgeschwindigkeit entfernen. Diese Entfernung wird auch als Welthorizont bezeichnet. Zu jeder Zeit hätte sich die am weitesten sichtbare Galaxie mit Überlichtgeschwindigkeit von der Galaxis entfernt, also außerhalb des sichtbaren Welthorizonts. Ihr Licht erreicht uns heute, aufgrund der bis **7,37** Milliarden Jahren zunächst gebremsten und dann verzögert beschleunigten Expansion des Kosmos.

Die kosmologische Rotverschiebung z_{kosm} des Lichts von einer Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_{T} zu der Galaxis geht gegen unendlich, zu dem heutigen Zeitpunkt t_1 und nach einer Lichtlaufzeit T:

$$z_{\text{kosm}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda(t_0)} = \frac{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)}{\lambda(t_0)} = \frac{f(t_0)}{f(t_1)} - 1 = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} - 1 = \frac{1}{x_0} - 1 \to \infty \quad \text{für} \quad t_0, x_0 \to 0$$

Beobachtete Galaxie mit der kosmologischen Rotverschiebung von $z_{\mathrm{kosm}} \sim 10$ (UDFj-39546284 im Januar 2011)

$$x_0 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} = \frac{f(t_1)}{f(t_0)} = \frac{1}{1 + z_{\mathrm{kosm}}} = \frac{1}{11} \quad \text{zum Zeitpunkt} \quad t_0 \approx \frac{0{,}0333}{H} \approx 466 \cdot 10^6 a$$

Das Licht von der beobachteten Galaxie wurde vor etwa **13** Milliarden Jahren ausgestrahlt.

Die Empfangsfrequenz des Lichts ist zum heutigen Zeitpunkt t_1 nach einer Lichtlaufzeit von $\tau = t_1 - t_0 \approx (0{,}964 - 0{,}0333)/H \approx 0{,}93/H \approx 13 \cdot 10^9 a$ um das **11**-fache kleiner als die Sendefrequenz. Das sichtbare Licht ist nach Infrarot verschoben.

Hubble-Konstante $H(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 466 \cdot 10^6 a$ mit $x_0 = 1/11$:

$$H(t_0) = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = H \cdot \frac{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}/x_0 + \Omega_\Lambda \cdot x_0^{\,2}}}{x_0} \approx 20 \cdot H \approx 1400 \frac{km/s}{Mpc}$$

Die Hubble-Konstante war nach **466** Millionen Jahren um das **20**-fache größer als die heutige Hubble-Konstante.

Galaxie am sichtbaren Welthorizont θ_{c} und die Entfernung D_{c} zu der Galaxis für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum Zeitpunkt $t_0 \approx 466 \cdot 10^6 a$:

$$\dot{D}_{\mathrm{c}}(t_0) = \theta_{\mathrm{c}}(t_0) \cdot \dot{R}(t_0) \overset{!}{=} c$$
$$D_{\mathrm{c}}(t_0) = \theta_{\mathrm{c}}(t_0) \cdot R(t_0) = \frac{c}{H(t_0)} \approx \frac{1}{20} \cdot \frac{c}{H} \approx 700 \cdot 10^6 Lj$$

Die Entfernung des sichtbaren Welthorizonts war nach **466** Millionen Jahren um das **20**-fache kleiner als die heutige Entfernung des sichtbaren Welthorizonts, also **700** Millionen Lichtjahre.

Sichtbarer Welthorizont θ_{c} zum Zeitpunkt $t_0 \approx 466 \cdot 10^6 a$ mit $x_0 = 1/11$:

$$\theta_{\mathrm{c}}(t_0) = \theta_{\mathrm{c}}(t_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}/x_0 + \Omega_\Lambda \cdot x_0^{\,2}}} \approx 0{,}55 \cdot \theta_{\mathrm{c}}(t_1)$$

Der sichtbare Welthorizont war nach **466** Millionen Jahren etwas halb so groß wie der heute sichtbare Welthorizont.

Licht von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis, das zum Zeitpunkt t_0 mit x_0 ausgestrahlt wurde, erreicht uns zum heutigen Zeitpunkt t_1 mit $x_1 = 1$ nach einer Lichtlaufzeit von $\tau = t_1 - t_0 \approx 0{,}93 / H \approx 13 \cdot 10^9 a$:

$$\theta_\tau \stackrel{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t_1) = \theta_{\text{c}}(t_1) \cdot \int_{1/11}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 2{,}20425 \cdot \theta_{\text{c}}(t_1) \quad \text{mit} \quad \theta_{\text{c}}(t_1) = \frac{c}{H \cdot R(t_1)}$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis zur Zeit $t \in (t_0, t_1)$ mit $x \in (x_0, x_1)$, während ihr Licht (Lichtlaufzeit τ) zu uns unterwegs ist:

$$\begin{aligned} D(t) &= \theta_\tau \cdot R(t) \approx 2{,}20425 \cdot \frac{c}{H} \cdot x \\ \dot{D}(t) &= H(t) \cdot D(t) \approx 2{,}20425 \cdot c \cdot \sqrt{\Omega_{\text{m}} / x + \Omega_\Lambda \cdot x^2} > c \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad x = \frac{R(t)}{R(t_1)}$$

Abstand D und Fluchtgeschwindigkeit $\dot{D}$ von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis zu den Zeitpunkten t_0 und t_1, wenn ihr Licht (Lichtlaufzeit τ) uns erreicht hat:

$$\begin{aligned} D(t_0) &= \theta_\tau \cdot R(t_0) = 2{,}20425 \cdot \frac{c}{H} \cdot x_0 \approx \frac{1}{11} \cdot 2{,}20425 \cdot 14 \cdot 10^9 \, Lj \approx 2{,}8 \cdot 10^9 \, Lj \\ \dot{D}(t_0) &= H(t_0) \cdot D(t_0) \approx 20 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2{,}20425 \cdot c \approx 4 \cdot c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t_1) &= \theta_\tau \cdot R(t_1) = 2{,}20425 \cdot \frac{c}{H} \approx 2{,}20425 \cdot 14 \cdot 10^9 \, Lj \approx 30{,}9 \cdot 10^9 \, Lj \\ \dot{D}(t_1) &= H \cdot D(t_1) \approx 2{,}20425 \cdot c \end{aligned}$$

Entfernung D_{Licht} und Lichtwegstrecke s des Lichts von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis zu dem heutigen Zeitpunkt t_1, wenn ihr Licht nach einer Lichtlaufzeit von $\tau = t_1 - t_0 \approx 0{,}93 / H \approx 13 \cdot 10^9 a$ uns erreicht hat:

$$\begin{aligned} D_{\text{Licht}}(t_1) &= D(t_1) \\ \dot{D}_{\text{Licht}}(t_1) - \dot{D}(t_1) &= c + H \cdot D_{\text{Licht}}(t_1) - H \cdot D(t_1) = c \\ s(t_1) &= c \cdot (t_1 - t_0) \approx 0{,}93 \cdot \frac{c}{H} \approx 13 \cdot 10^9 \, Lj \end{aligned}$$

Zu welchem Zeitpunkt $t > 0$ erreichte das Licht von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis erstmals als Radiowellen ($t_0, x_0 \to 0$) die Galaxis?

$$\theta_{\text{Licht}}(t) = \theta_c(t_1) \cdot \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_m \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \overset{!}{=} \theta_\tau \approx 2,20425 \cdot \theta_c(t_1) \quad \text{mit} \quad \theta_c(t_1) = \frac{c}{H \cdot R(t_1)}$$

Mit $x = R(t)/R(t_1) \approx 0,37037$ gilt $H * t \approx 0,2691978$ und $t \approx 3,77 \cdot 10^9 a$.

Die kosmologische Rotverschiebung verschob das sichtbare Licht zu den Radiowellen:

$$z_{\text{kosm}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda(t_0)} = \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{\lambda(t_0)} = \frac{f(t_0)}{f(t)} - 1 = \frac{R(t)}{R(t_0)} - 1 = \frac{x}{x_0} - 1 \to \infty \quad \text{für} \quad x_0 \to 0$$

Angenommen die beobachtete Galaxie gab es bereits unmittelbar nach dem Urknall ($t_0, x_0 \to 0$), dann erreichten die Radiowellen erstmals nach **3,77** Milliarden Jahren die Galaxis, also vor **9,73** Milliarden Jahren. Die Galaxis ist mindestens **10** Milliarden Jahre alt.

Zu welchem Zeitpunkt $t_0 > 0$ strahlte die beobachtete Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis das Licht aus, welches nach Infrarot verschoben vor **4,6** Milliarden Jahren das gerade entstandene Sonnensystem (Erde) erstmals erreichte?

Mit $t \approx 13,5 \cdot 10^9 a - 4,6 \cdot 10^9 a = 8,9 \cdot 10^9 a$ und $H * t \approx 0,6357142$ gilt $x \approx 0,57949$.

$$\theta_{\text{Licht}}(t) = \theta_c(t_1) \cdot \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_m \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \overset{!}{=} \theta_\tau \approx 2,20425 \cdot \theta_c(t_1) \quad \text{mit} \quad \theta_c(t_1) = \frac{c}{H \cdot R(t_1)}$$

Mit $x_0 = R(t_0)/R(t_1) \approx 0,018637$ gilt $H * t_0 \approx 0.00309678$ und $t_0 \approx 43,36 \cdot 10^6 a$.

Die kosmologische Rotverschiebung verschob das sichtbare Licht nach Infrarot:

$$z_{\text{kosm}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda(t_0)} = \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{\lambda(t_0)} = \frac{f(t_0)}{f(t)} - 1 = \frac{R(t)}{R(t_0)} - 1 = \frac{x}{x_0} - 1 \sim 30$$

Die beobachtete Galaxie strahlte das Licht nach **43,36** Millionen Jahren aus, welches nach Infrarot verschoben vor **4,6** Milliarden Jahren das Sonnensystem erstmals erreichte.

Das Licht von der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis erreicht uns heute mit Überlichtgeschwindigkeit nach einer Lichtlaufzeit τ von **13** Milliarden Jahren und einer Lichtwegstrecke s von **13** Milliarden Lichtjahren, aufgrund der zunächst gebremsten und dann verzögert beschleunigten Expansion des Kosmos. Die Fluchtgeschwindigkeit der beobachteten Galaxie mit dem konstanten Winkel θ_τ zu der Galaxis relativiert die Lichtgeschwindigkeit c des lokal in der Galaxis empfangenen Lichts.

Nach dem gegenwärtigen Weltmodell wäre die beobachtete Galaxie **2,8** Milliarden Lichtjahre entfernt gewesen, als ihr Licht ausgestrahlt wurde, das uns heute nach einer Lichtlaufzeit τ erreicht. Sie wäre heute **30,9** Milliarden Lichtjahre entfernt. Zu jeder Zeit hätte sich die beobachtete Galaxie mit Überlichtgeschwindigkeit von der Galaxis entfernt, also außerhalb des sichtbaren Welthorizonts. Ihr Licht erreicht uns heute, aufgrund der bis **7,37** Milliarden Jahren zunächst gebremsten und dann verzögert beschleunigten Expansion des Kosmos.

Hubble-Diagramm

Die kosmologische Rotverschiebung z_{kosm} des Lichts von einer Galaxie, die heute weniger als **3** Milliarden Lichtjahre von der Galaxis entfernt ist, ist nahezu proportional zu dem heutigen Abstand $D(t_1)$, der mittels Helligkeit gemessen werden kann:

$$z_{\text{kosm}} \approx \frac{H}{c} \cdot D(t_1) = \frac{\dot{D}(t_1)}{c}$$

Ursache ist die verzögert beschleunigte Expansion des Kosmos vor dem heutigen Zeitpunkt t_1.

Beispielsweise gilt für $x_0 = 0,8$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0,753/H \approx 10,5 \cdot 10^9\, a$, als das Licht von einer Galaxie ausgestrahlt wurde und uns zum heutigen Zeitpunkt $t_1 \approx 0,964/H \approx 13,5 \cdot 10^9\, a$ mit $x_1 = 1$ erreicht, nach einer Lichtlaufzeit von $\tau = t_1 - t_0 \approx 0,211/H \approx 2,95 \cdot 10^9\, a$:

$$\begin{aligned}
&z_{\text{kosm}} = \frac{1}{x_0} - 1 = 0,25 \\
&\theta_\tau \stackrel{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t_1) \\
&\frac{H}{c} \cdot D(t_1) = \frac{H}{c} \cdot \theta_\tau \cdot R(t_1) = \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 0,235396 \\
&D(t_1) \approx 0,235396 \cdot \frac{c}{H} \approx 3,3 \cdot 10^9\, Lj \quad \text{und} \quad \dot{D}(t_1) \approx 0,235396 \cdot c
\end{aligned}$$

Die Abweichung von etwa **5,8**% geht gegen null für $t_0 \to t_1$ und $x_0 \to x_1 = 1$.

Liegt dagegen die Galaxie heute am sichtbaren Welthorizont in der Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren und entfernt sich die Galaxie mit Lichtgeschwindigkeit, dann gilt für $x_0 \approx 0,407$ zum Zeitpunkt $t_0 \approx 0,582/H \approx 8,14 \cdot 10^9\, a$, als das Licht ausgestrahlt wurde und uns heute erreicht, nach einer Lichtlaufzeit von $\tau = t_1 - t_0 \approx 0,382/H \approx 5,34 \cdot 10^9\, a$:

$$\begin{aligned}
&z_{\text{kosm}} = \frac{1}{x_0} - 1 \approx 1,457 \\
&\theta_\tau \stackrel{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t_1) = \theta_{\text{c}}(t_1) \quad \text{und} \quad D(t_1) = D_{\text{c}}(t_1) \\
&\frac{\dot{D}(t_1)}{c} = \frac{H}{c} \cdot D(t_1) = \frac{H}{c} \cdot \theta_\tau \cdot R(t_1) = \int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\text{m}} \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} = 1
\end{aligned}$$

Lichttrajektorie zum sichtbaren Welthorizont

Die zeitliche Entwicklung des Winkels $\theta_{\text{Licht}}(t)$ und der Entfernung $D_{\text{Licht}}(t)$ von dem Licht, das von der Galaxis im expandierenden Kosmos für $t > t_1$ mit $x > x_1 = 1$ ausgestrahlt wird:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{Licht}}(t) &= \int_0^\theta d\theta' = \theta_c(t_1) \cdot \int_1^x \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_m \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \\ D_{\text{Licht}}(t) &= \theta_{\text{Licht}}(t) \cdot R(t) = \frac{c}{H} \cdot x \cdot \int_1^x \frac{dx'}{\sqrt{\Omega_m \cdot x' + \Omega_\Lambda \cdot x'^4}} \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \theta_c(t_1) = \frac{c}{H \cdot R(t_1)}$$

Maximaler Winkel $\theta_{\text{Licht}}(t \to \infty)$ des Lichts von der Galaxis bei unendlicher Lichtlaufzeit:

$$\begin{aligned} \theta_\infty &\overset{!}{=} \theta_{\text{Licht}}(t \to \infty) = \theta_c(t_1) \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} = \\ &= \theta_c(t_1) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} - \theta_c(t_1) \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx \\ &\approx (4,44574 - 3,30508) \cdot \theta_c(t_1) = 1{,}14066 \cdot \theta_c(t_1) \\ D(t_1) &= \theta_\infty \cdot R(t_1) \approx 1{,}14066 \cdot \frac{c}{H} \approx 16 \cdot 10^9\, Lj \end{aligned}$$

Das Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt t_1 ausgestrahlt wird, erreicht zu keiner Zeit $t > t_1$ Galaxien, die heute in einer Entfernung von **16** Milliarden Lichtjahren liegen.

Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt $t_1 \approx 0,9641/H$ mit $x_1 = 1$ ausgestrahlt wird und zum Zeitpunkt $t_2 \approx 0,99974/H$ mit $x_2 = R(t_2)/R(t_1) = 1,036$ nach einer Lichtlaufzeit τ von etwa 500 Millionen Jahren die Entfernung $D_{\text{Licht}}(t_2)$ erreichen wird:

$$\tau = t_2 - t_1 \approx \frac{0,99974 - 0,9641}{H} \approx \frac{0,03564}{H} \approx 499 \cdot 10^6 a$$

$$\begin{aligned} \theta_{\text{Licht}}(t_2) &= \theta_c(t_1) \cdot \int_1^{1,036} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 0,0350186 \cdot \theta_c(t_1) \\ D_{\text{Licht}}(t_2) &= \theta_{\text{Licht}}(t_2) \cdot R(t_2) \approx 1,036 \cdot 0,0350186 \cdot \frac{c}{H} \approx 0,0362793 \cdot \frac{c}{H} \approx 508 \cdot 10^6\, Lj \end{aligned}$$

Das Licht von der Galaxis würde bereits nach **499** Millionen Jahren die Entfernung von **508** Millionen Lichtjahren erreichen, also nur **1,8** % früher, aufgrund der Expansion des Kosmos.

Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt t_1 mit $x_1 = 1$ ausgestrahlt wird und zum Zeitpunkt $t_2 \approx 1,766/H \approx 24,72 \cdot 10^9 a$ mit $x_2 = R(t_2)/R(t_1) = 2,065$ nach einer Lichtlaufzeit τ den sichtbaren Welthorizont $\theta_c(t_2)$ in der Entfernung $D_c(t_2)$ erreichen wird:

$$\tau = t_2 - t_1 \approx \frac{1,766 - 0,964}{H} \approx \frac{0,802}{H} \approx 11,23 \cdot 10^9 a$$

$$\theta_{\text{Licht}}(t_2) = \theta_c(t_1) \cdot \int_1^{2,065} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 0,565314 \cdot \theta_c(t_1)$$
$$D_{\text{Licht}}(t_2) = \theta_{\text{Licht}}(t_2) \cdot R(t_2) \approx 2,065 \cdot 0,565314 \cdot \frac{c}{H} \approx 1,167 \cdot \frac{c}{H} \approx 16,34 \cdot 10^9 Lj$$

Sichtbarer Welthorizont θ_c für $\dot{D} \to c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum Zeitpunkt $t_2 \approx 24,72 \cdot 10^9 a$:

$$\dot{D}_c(t_2) = \theta_c(t_2) \cdot \dot{R}(t_2) \stackrel{!}{=} c$$
$$D_c(t_2) = \theta_c(t_2) \cdot R(t_2) = \frac{c}{H(t_2)} \approx \frac{1}{0,8568} \cdot \frac{c}{H} \approx 16,34 \cdot 10^9 Lj$$

Das Licht von der Galaxis würde nach **11,23** Milliarden Jahren den dann sichtbaren Welthorizont in der Entfernung von **16,34** Milliarden Lichtjahren erreichen, aufgrund der Expansion des Kosmos.

Licht von der Galaxis, das zum heutigen Zeitpunkt t_1 mit $x_1 = 1$ ausgestrahlt wird und zum Zeitpunkt $t_2 \approx 1,681/H \approx 23,53 \cdot 10^9 a$ mit $x_2 = 1,92$ nach einer Lichtlaufzeit τ die Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren erreichen wird:

$$\tau = t_2 - t_1 \approx \frac{1,681 - 0,964}{H} \approx \frac{0,717}{H} \approx 10 \cdot 10^9 a$$

$$\theta_{\text{Licht}}(t_2) = \theta_c(t_1) \cdot \int_1^{1,92} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_m \cdot x + \Omega_\Lambda \cdot x^4}} \approx 0,522746 \cdot \theta_c(t_1)$$
$$D_{\text{Licht}}(t_2) = \theta_{\text{Licht}}(t_2) \cdot R(t_2) \approx 1,92 \cdot 0,522746 \cdot \frac{c}{H} \approx \frac{c}{H} \approx 14 \cdot 10^9 Lj$$

Sichtbarer Welthorizont θ_c für $\dot{D} \rightarrow c$ (Lichtgeschwindigkeit) zum Zeitpunkt $t_2 \approx 23{,}53 \cdot 10^9 a$:

$$\dot{D}_c(t_2) = \theta_c(t_2) \cdot \dot{R}(t_2) \stackrel{!}{=} c$$

$$D_c(t_2) = \theta_c(t_2) \cdot R(t_2) = \frac{c}{H(t_2)} \approx \frac{1}{0{,}8616} \cdot \frac{c}{H} \approx 16{,}25 \cdot 10^9 Lj$$

Das Licht von der Galaxis würde nach **10** Milliarden Jahren die Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren erreichen, aufgrund der Expansion des Kosmos. Das Licht würde aber noch nicht die Entfernung von **16,25** Milliarden Lichtjahren des dann sichtbaren Welthorizonts erreichen.

Das gegenwärtige Weltmodell kann näherungsweise die Aufgabe 4.1 „Zeitdilatation bei Raumfahrt" (Torsten Fließbach, ART, 5. Auflage 2006, Seite 19 und 345) für große Entfernungen beschreiben. Das mit 1g beschleunigte Raumschiff, das weniger als ein Lichtjahr entfernt einem vorausgesandten Lichtstrahl folgt, würde bereits nach **10** Milliarden Jahren die Entfernung von **14** Milliarden Lichtjahren erreichen, aufgrund der zunächst gebremsten und dann verzögert beschleunigten Expansion des Kosmos. Die Eigenzeit im Raumschiff wäre dann **23** Jahre.