ZWILLINGSPARADOXON

Einleitung

Der eine Zwilling verreist mit dem Raumschiff und kehrt nach Jahren zur Erde zurück. Der andere Zwilling verbleibt auf der Erde. Beide Zwillinge altern unterschiedlich, ein so genanntes Zwillingsparadoxon!

Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Die mathematischen Beziehungen zu dessen Herleitung wurden der folgenden Quelle entnommen:

„Allgemeine Relativitätstheorie" von Torsten Fließbach, 5. Auflage 2006, Aufgaben 4.1 „Zeitdilatation bei Raumfahrt"

Die Erde ist (näherungsweise) ein Inertialsystem (IS).

Dann gelten mit der konstanten Beschleunigung g, der Geschwindigkeit v, der Entfernung x und der Eigenzeit τ des Raumschiffs und mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Zeit t die relativistischen Beziehungen der speziellen Relativitätstheorie (SRT):

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)/c^2}} = \frac{dv(t)/dt}{\sqrt[3/2]{1-v^2(t)/c^2}} = g$$

Die Integration ergibt mit den Anfangsbedingungen $v(0)=0$, $x(0)=0$ und $v(t)=dx(t)/dt$

$$v(t) = \frac{g\cdot t}{\sqrt{1+(g\cdot t)^2/c^2}} \quad \text{und} \quad x(t) = \frac{c^2}{g}\cdot\left(\sqrt{1+(g\cdot t)^2/c^2}-1\right)$$

Die Eigenzeit τ des Raumschiffs:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-v^2(t)/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(g\cdot t)^2/c^2}}$$

Die Integration ergibt

$$\tau = (c/g)\cdot \operatorname{ar\,sinh}(g\cdot t/c) \quad \text{oder} \quad t = (c/g)\cdot\sinh(g\cdot\tau/c)$$

Funkwellen von der Erde zur Zeit t' erreichen das Raumschiff zur Zeit t:

$$c \cdot (t - t') = x(t) \quad \text{und} \quad t' \to c/g \quad \text{für} \quad t \leftrightarrow \infty$$

Das Zwillingsparadoxon

In der 1. Phase beschleunigt das Raumschiff mit der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ in der Eigenzeit von $\tau = 4$ Jahren. In der anschließenden 2. Phase bremst das Raumschiff mit der negativen Erdbeschleunigung $-g$ in der Eigenzeit von $\tau = 4$ Jahren, bis es relativ zur Erde ruht. Die Rückkehr des Raumschiffs zur Erde erfolgt mit dem gleichen Ablauf in der 3. und 4. Phase. Der Zwilling im Raumschiff spürt während seiner Reise sein Erdgewicht. Daher gelten in jeder der vier Phasen jeweils die gleichen o.a. mathematischen Beziehungen.

Dann gilt für den Zwilling auf der Erde die vergangene Zeit $2 \cdot t$, bis das Raumschiff ruht:

$2 \cdot t \approx 30$ Jahre + 30 Jahre = 60 Jahre mit $c/g \approx 0{,}9684$ a (siderisches Jahr)

- Zeit t wird von der Erde aus gemessen

Dann gelten für den Zwilling im Raumschiff die Reisezeit $2 \cdot \tau$, die Höchstgeschwindigkeit v und die Entfernung $2 \cdot x$, bis das Raumschiff ruht:

$2 \cdot \tau = 4$ Jahre + 4 Jahre = 8 Jahre

$v(t) \approx 99{,}95\%$ von $c = 299.792.458\ \mathrm{m/s}$ für $t \approx 30$ Jahre

$2 \cdot x(t)/c \approx 29$ Lichtjahre + 29 Lichtjahre = 58 Lichtjahre für $2 \cdot t \approx 60$ Jahre

- Eigenzeit τ wird von dem Raumschiff aus gemessen
- $v(t)$ und $x(t)$ des Raumschiffs werden von der Erde aus gemessen

Dann erreichen die Funknachrichten von dem Zwilling auf der Erde noch bis zur Zeit t' den Zwilling im beschleunigten Raumschiff:

$t' \approx 0,9528 < c/g < 1$ Jahr für $t \approx 30$ Jahre

Die Nachrichten können daher nur innerhalb des ersten Jahres von dem Zwilling auf der Erde gesendet und von dem Zwilling im Raumschiff während der Beschleunigung empfangen werden!

Zusammenfassung

Nach der Reisezeit von $2 \cdot \tau = 8$ Jahren ruht das Raumschiff relativ zur Erde in einer Entfernung von 58 Lichtjahren. Der mitreisende Zwilling ist 8 Jahre älter und der auf der Erde verbliebene Zwilling 60 Jahre älter geworden.

Bei der Rückkehr des Raumschiffs zur Erde mit dem gleichen Ablauf ist der mitreisende Zwilling 16 Jahre älter und der auf der Erde verbliebene Zwilling 120 Jahre älter geworden, falls er noch lebt.

Anmerkung

Das Raumschiff ist kein Inertialsystem (IS)! Das Raumschiff ist ein beschleunigtes System!

Geschwindigkeit und Entfernung der Erde, von dem Raumschiff aus gemessen, und die Eigenzeit der Erde, von der Erde aus gemessen, können mit den o.a. mathematischen Beziehungen nicht ermittelt werden.

Die Lichtgeschwindigkeit stellt eine Obergrenze dar. Wenn das beschleunigte Raumschiff die Eigenzeit von $\tau = 4$ Jahren erreicht hat, dann ist z.B. die Erde weniger als 4 Lichtjahre von dem Raumschiff entfernt. Das ist eine verkürzte Entfernung der Erde aufgrund der Längenkontraktion!